CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-Q00**.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

TEST DIAGNOSTYCZNY

Symbol arkusza
MMAP-R0-Q00-2412

DATA: **12 grudnia 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **do 210 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:
☐ dostosowania zasad oceniania.

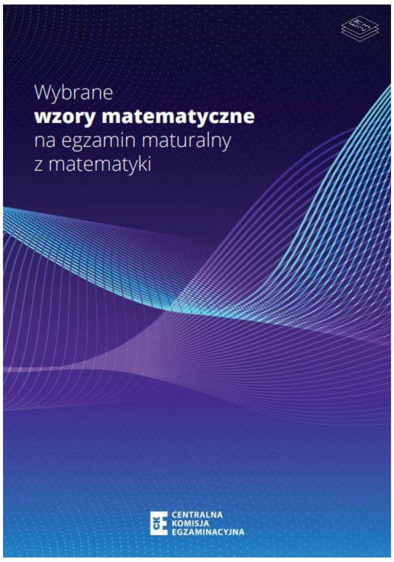
Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronach 2 oraz 3.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 51 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
3. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.

7. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadanie 1. (2 pkt)

Ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze można opisać zależnością

$$Q(t) = Q_0 \cdot \beta^{-t} \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

Q_0 – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili początkowej ($t = 0$) wyrażony w milikulombach

Q – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili t (licząc od chwili początkowej) wyrażony w milikulombach

β – stała dodatnia

t – czas wyrażony w sekundach.

Wiadomo, że w chwili $t = 4$ s w kondensatorze był zgromadzony ładunek 2 milikulombów, a w chwili $t = 6$ s – ładunek 18 milikulombów.

Oblicz, ile milikulombów ładunku było zgromadzone w tym kondensatorze w chwili $t = 5$ s. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (2 pkt)

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz przecina bok AB tego trójkąta w punktach M oraz N, przy czym $0 < |AM| < |AN| < |AB|$.

Wykaż, że jeśli $|AM| = |BN|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 3. (3 pkt)

Iloczyn długości średnicy podstawy walca i wysokości walca jest równy $12\sqrt{3}$.

Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe $12\pi\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Oblicz objętość tego walca. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (3 pkt)

Wykaż, że

$$\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1} = 1$$

Zadanie 5. (3 pkt)

W pewnej lokalnej społeczności 35% osób ma wyższe wykształcenie. W tej społeczności językiem niemieckim dobrze włada 70% osób mających wyższe wykształcenie i 40% osób bez wyższego wykształcenia.
Spośród członków tej społeczności wybieramy losowo jedną osobę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wybierzemy osobę z wyższym wykształceniem, jeżeli wiadomo, że ta osoba dobrze włada językiem niemieckim. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (4 pkt)

Rozwiąż równanie

$$|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (4 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są:

okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 50$ i punkty $A = (6, 4)$

oraz $B = (-6, 8)$.

Punkt C leży na tym okręgu i $|AC| = |BC|$.

Oblicz współrzędne punktu C. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (4 pkt)

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1)}{\binom{n}{2}}$$

gdzie $1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1)$ **jest sumą kolejnych liczb naturalnych nieparzystych. Zapisz obliczenia.**

Zadanie 9. (4 pkt)

Rozwiąż równanie

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (5 pkt)

Trzeci i piąty wyraz malejącego ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, spełniają warunek $a_3 + a_5 = 10$.

Trzywyrazowy ciąg $\left(2a_1 + 4, a_4 - 1, -\frac{1}{8}a_7\right)$ jest geometryczny.

Oblicz wyrazy tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (5 pkt)

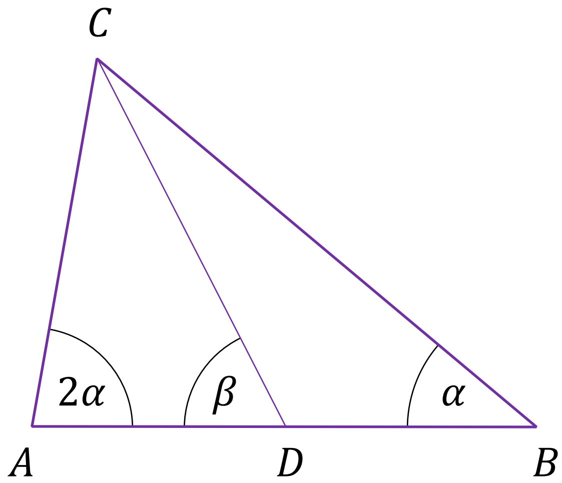
Funkcja kwadratowa f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem

$$f(x) = x^2 - 3x - m^2 + m + 3$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe x_1 , x_2 spełniające warunek $\left|x_1^2 - x_2^2\right| \leq 12$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (5 pkt)

W trójkącie ostrokątnym ABC miara kąta BAC jest dwa razy większa od miary kąta ABC. Punkt D jest środkiem boku AB. Niech α oznacza miarę kąta ABC, natomiast β – miarę kąta ADC (zobacz rysunek).



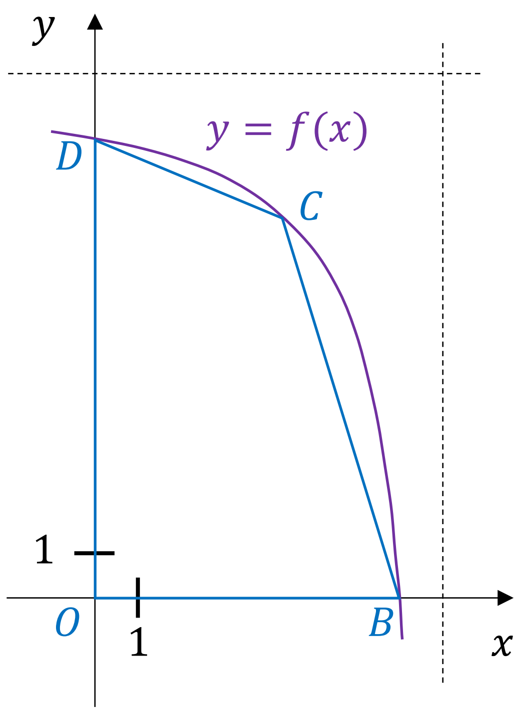
Oblicz $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{12x-84}{x-8}$ dla każdego $x\in(-\infty,8)$. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) rozważamy wszystkie czworokąty $OBCD$, w których:

- wierzchołek O ma współrzędne $(0,0)$
- wierzchołki B oraz D są punktami przecięcia wykresu funkcji f z osią – odpowiednio – Ox i Oy
- wierzchołek C ma obie współrzędne dodatnie i leży na wykresie funkcji f

(zobacz rysunek).



Zadanie 13.1. (2 pkt)

Wykaż, że pole P czworokąta $OBCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}}$$

Zadanie 13.2. (4 pkt)

Pole P czworokąta $OBCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

dla $x \in (0, 7)$.

Oblicz współrzędne wierzchołka C, dla których pole czworokąta $OBCD$ jest największe. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
Formuła 2023

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
Formuła 2023

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
Formuła 2023